Marginalisme et valeur de Shapley

Amandine GHINTRAN *

19 mai 2010

Résumé

Cet article est une revue de la littérature concernant l'axiomatisation de la valeur de Shapley (Shapley (1953)). Cette règle d'allocation marginaliste est le résultat d'une étude axiomatique menée par Shapley sur la classe des jeux de coalitions : l'auteur énonce un ensemble de propriétés qu'il souhaite voir satisfaites par une règle d'allocation définie sur cette classe de jeux, puis il montre que de la combinaison de ces propriétés émerge une unique règle d'allocation, la valeur de Shapley. Plusieurs auteurs ont ensuite enrichi l'étude axiomatique initiée par Shapley et proposé de nouvelles caractérisations pour cette règle d'allocation.
L'objectif de l'article est de mettre en perspective ces caractérisations. Tout au long de notre exposé, nous mettrons en évidence les relations logiques qui existent entre les différentes combinaisons d'axiomes. Nous nous attacherons aussi à montrer comment le critère de rémunération à la contribution marginale, qui n'est pas explicitement présent dans la caractérisation proposée par Shapley (1953), est progressivement introduit dans l'axiomatique.

Valeur de Shapley - étude axiomatique - marginalisme
Classification JEL : C71

Marginalism and the Shapley value

Abstract

We survey axiomatic results concerning the Shapley value (Shapley (1953)). This marginalist allocation rule results from an axiomatic

*Óbuda University, Keleti Faculty of Economics, Tavaszmezö 15-17, H-1084 Budapest, Hungary. Amandine.Ghintran@kgk.uni-obuda.hu. Tel : (+36) (1) 6665261

study of the class of coalitional games. Shapley (1953) specifies a list of desirable properties of solutions for this class of games, and he shows that the combination of these properties determines a unique allocation rule, now called the Shapley value. Several authors have enriched Shapley's axiomatic study and have provided new characterizations of this allocation rule.
The aim of this article is to put into perspective these characterizations. We highlight the logical relations between the axioms. Moreover, we show how the marginalist criterion, which was not explicitely present in Shapley's characterisation, is progressively introduced into the axiomatic.

Shapley value - axiomatic study - marginalism

De nombreux projets économiques et sociaux sont menés à bien par des groupes d'agents qui coopèrent afin d'atteindre un objectif commun. Par exemple, la firme Airbus, pour produire ses avions de ligne, coopère avec plusieurs centaines de sous-traitants de manière à rationaliser le processus de production et faire face à la concurrence. On peut aussi citer l'exemple des compagnies aériennes qui coopèrent de façon à augmenter leur offre de destinations et accroître leur profit. Dans ce contexte, il semble légitime de se demander comment répartir de manière juste la valeur produite par un groupe d'agents.

La théorie des jeux coopératifs fournit un cadre adapté pour traiter cette question. Dans ce cadre théorique, les individus sont appelés joueurs. Chaque coalition de joueurs a la possibilité de se former afin de mener à bien le projet commun de manière autonome. La création de valeur résultant de la réalisation du projet dépend de la coalition formée. Un jeu de coalitions résume les informations concernant la valeur produite par chaque coalition lorsque ses membres coopèrent. Nous supposerons que le produit de la coopération est transférable entre les joueurs, ou bien que les joueurs ont à leur disposition un bien servant de monnaie d'échange leur permettant de réaliser des transferts d'utilité entre eux. Nous nous restreindrons donc à la classe des jeux de coalitions à utilité transférable. Le problème à résoudre se pose dans les termes suivants : comment répartir de manière juste la valeur produite par la coopération des joueurs ?

Une solution au problème que nous venons de présenter est définie relativement à une classe de jeux de coalitions. C'est une correspondance qui associe à chaque élément d'une classe, un ensemble, éventuellement vide, de vecteurs d'allocation. Ces vecteurs indiquent comment les joueurs profitent individuellement de la valeur générée par leur coopération. Comme le note

Moulin (1981), dans un jeu de coalitions, une solution est déterminée non pas par les comportements stratégiques des joueurs, mais par la collectivité à laquelle les joueurs ont confié leur pouvoir décisionnel. C'est elle qui est chargée de sélectionner une solution satisfaisante et les joueurs s'engagent à la mettre en oeuvre en signant un contrat. Une solution satisfaisante est une solution qui pourrait être préconisée par un arbitre impartial sur la base des principes de justice distributive qu'elle véhicule. La théorie des jeux coopératifs fournit plusieurs solutions pour les jeux de coalitions. Les règles d'allocation sont des solutions associant à chaque problème un unique vecteur d'allocation. Elles présentent l'avantage de donner les recommandations les plus précises possibles concernant la détermination des allocations des joueurs.

Pour construire une règle d'allocation, une méthode couramment utilisée consiste à adopter une démarche axiomatique. Thomson (2001) liste et analyse les différents éléments qui la composent. Une étude axiomatique débute par la détermination d'une classe de jeux de coalitions pertinente et la formulation d'un ensemble de propriétés désirables ou raisonnables que devrait satisfaire une règle d'allocation définie sur cette classe. La deuxième phase consiste à vérifier que la combinaison de ces propriétés détermine bien une unique règle d'allocation, ou une unique famille de règles d'allocation. Une telle étude est complète si elle inclut aussi les trois éléments suivants : une analyse des relations logiques entre les axiomes, une discussion concernant l'impact de la modification de la classe de jeux considérée sur la caractérisation de la règle d'allocation, et éventuellement un travail sur les possibles répercussions qu'entraînerait le remplacement de certains axiomes par des variantes naturelles. La finalité de cette méthode est de fournir aux utilisateurs de ces règles d'allocation les informations les plus précises possibles de manière à éclairer leur choix.

Dans cet article, nous nous intéressons à une règle d'allocation bien établie dans la littérature : la valeur de Shapley (Shapley (1953)). C'est une règle d'allocation marginaliste : elle alloue aux joueurs la moyenne de leurs contributions marginales aux coalitions du jeu. Elle a reçu un grand nombre d'applications en économie. Par exemple, Littlechild et Owen (1973) et Littlechild et Thompson (1977) l'utilisent pour répartir les coûts de construction des pistes d'atterrissage d'un aéroport entre les différentes compagnies aériennes. Billera, Heath, et Raanan (1978) l'utilisent pour répartir les coûts des appels téléphoniques longue distance. Moretti et Patrone (2008) fournissent une revue de la littérature sur les applications de la valeur de Shapley. Cette règle d'allocation est le résultat d'une étude axiomatique menée par l'auteur sur la classe des jeux de coalitions. Elle a ensuite été caractérisée de multiples manières par différents auteurs et sur différentes classes de jeux de coalitions. Chacune de ces nouvelles caractérisations a contribué à enrichir l'étude axiomatique initiée par Shapley.

L'objet de cet article est de proposer une revue de littérature mettant en perspective ces différentes caractérisations de la valeur de Shapley, et d'offrir une vision synthétique des études axiomatiques proposées par les auteurs. Nous nous attacherons tout particulièrement à analyser les relations logiques qui existent entre différentes combinaisons d'axiomes. Comme l'indique Thomson (2001), il est important de s'assurer que les axiomes mobilisés pour caractériser une règle d'allocation sont logiquement indépendants. Supposons que nous ayons montré que la combinaison des axiomes $A_1, \ldots, A_n$ détermine une unique règle d'allocation, notée Y, définie sur la classe de jeux de coalitions qui nous intéresse. Les axiomes $A_1, \ldots, A_n$ sont logiquement indépendants si chaque fois que l'on en supprime un, Y n'est plus la seule règle d'allocation à vérifier l'ensemble des axiomes restants. Pour montrer que l'axiome A_1 est logiquement indépendant des axiomes $A_2, \ldots, A_n$, il convient de donner un exemple de règle d'allocation différente de Y, qui satisfait tous les axiomes excepté A_1.

Des axiomes sont logiquement dépendants s'ils expriment la même idée sous des formes différentes. Nous dirons que l'axiome A_1 est logiquement plus fort que l'axiome A_2 (et A_2 est logiquement plus faible que A_1) si A_1 implique A_2 et si la réciproque est fausse. Si A_1 implique A_2 et A_2 implique A_1, alors ces deux axiomes sont équivalents. Lorsque l'on s'aperçoit que des axiomes sont équivalents, il convient de conserver la version dont l'interprétation est la plus naturelle dans la caractérisation. Si l'une des versions est plus faible que les autres, alors c'est elle qui doit apparaître dans la caractérisation, sous réserve que celle-ci tienne toujours.

Certaines des relations logiques présentées dans cet article ont déjà été mises en évidence, d'autres ne l'ont jamais été à notre connaissance. L'analyse de ces relations logiques est absente de la revue de littérature concernant les caractérisations de la valeur de Shapley proposée par Winter (2002). De plus, nous présentons ici les caractérisations de van den Brink (2001) et de Casajus (2009), absentes de Winter (2002). Une autre originalité de cet article consiste à montrer comment différents critères de rémunération des joueurs à hauteur de leurs contributions marginales, qui ne sont pas explicitement présents dans la caractérisation fournie par Shapley (1953), sont progressivement introduits dans l'axiomatique.

Les caractérisations auxquelles nous nous intéresserons s'articulent autour d'axiomes reposant sur la notion de justice distributive et, pour certaines, d'axiomes de simplification. Les axiomes de simplification peuvent recevoir une interprétation économique mais leur interprétation en termes de justice distributive est moins évidente. Certains axiomes mettent en cohérence l'allocation de deux jeux d'une même classe dont les valeurs des coalitions ou la taille de la population diffèrent. D'autres nous renseignent sur la rémunération de certains types de joueurs d'un même jeu. Dans cet article, nous ne traitons pas des caractérisations reposant sur des principes de cohérence, qui indiquent comment varient les allocations des joueurs lorsque l'on considère des jeux réduits. De telles caractérisations ont été proposées par Hart et Mas-Colell (1989) et Hamiache (2001).

La notion de justice distributive recouvre plusieurs principes : l'impartialité, l'équité, l'efficacité,... L'impartialité suggère qu'une allocation de la valeur produite par la coopération de tous ne doit pas dépendre de l'identité des individus. Autrement dit, l'identité des individus ne fait pas partie des caractéristiques pertinentes pour résoudre le problème d'allocation. L'équité suggère que les caractéristiques d'individus différents doivent être prises en compte de manière identique. La difficulté réside ici dans la détermination des caractéristiques pertinentes face au problème de redistribution d'une valeur. Par exemple, le simple fait de participer au jeu peut être considéré comme une caractéristique pertinente. Si l'on suppose que c'est la seule, les joueurs doivent être traités égalitairement et recevoir des allocations identiques. Le critère marginaliste, bien établi en sciences économiques, peut aussi constituer une caractéristique pertinente face au problème de la juste redistribution d'une valeur. Un jeu de coalitions nous permet de prendre en compte au moins deux types de contribution marginale : la contribution marginale d'un joueur à un jeu et la contribution marginale aux coalitions d'un jeu. Une règle d'allocation pourra être considérée comme équitable si elle prend en compte cette caractéristique de la même façon pour tous les joueurs, c'est-à-dire si elle les rémunère à hauteur de leurs contributions marginales soit au jeu, soit aux coalitions d'un jeu. Ainsi le marginalisme fournit à l'économiste un outil pertinent pour comparer les caractéristiques des joueurs et pour déterminer une juste allocation. Enfin, nous dirons qu'une règle d'allocation est efficace si la valeur produite par la coopération de tous est intégralement redistribuée aux joueurs ; autrement dit, le processus de redistribution n'est pas coûteux. Ceci suppose que tous les individus ont coopéré à la réalisation du projet commun. En revanche, ceci ne signifie pas nécessairement que l'on redistribue la plus grande valeur du jeu.

Dans cet article, nous présenterons neuf caractérisations différentes de la valeur de Shapley. Chaque caractérisation reposera sur des principes de justice distributive. Nous avons choisi de les organiser selon le critère suivant : nous présenterons d'abord des caractérisations mettant en relation les allocations pour des jeux dont seules les valeurs des coalitions diffèrent, la population étant fixée. Ces caractérisations seront donc valables pour la classe des jeux de coalitions définis sur un ensemble fini et fixé de joueurs, et ceci, pour chaque ensemble fini et fixé de joueurs. Ceci a pour conséquence que le critère marginaliste y est toujours exprimé sous forme de contribution marginale des joueurs aux coalitions d'un même jeu ou de jeux différents mais définis sur le même ensemble de joueurs. Nous verrons que pour chaque ensemble fini et fixé de joueurs, ces caractérisations n'assurent plus nécessairement l'unicité de l'allocation si l'on restreint la classe de jeux considérée. Ensuite, nous présenterons des caractérisations mettant en relation des jeux pour lesquels la taille de la population varie. Nous obtiendrons des caractérisations valables sur toute la classe des jeux de coalitions. Dans ce type de caractérisations, le critère marginaliste est défini comme la contribution marginale d'un joueur à un jeu de coalitions.

Cet article est organisé de la manière suivante. La section 1 énonce les concepts et définitions dont nous aurons besoin par la suite. La section 2 présente les caractérisations de Shapley (1953), Shubik (1962), Dubey (1975), Young (1985), Chun (1991), van den Brink (2001) et Casajus (2009). La section 3 présente les caractérisations de Myerson (1980) et de Hart et Mas-Colell (1989). Enfin, la section 4 conclura sur la mise en relation des différentes caractérisations.

1 Préliminaires

Cette section est consacrée aux définitions des outils utilisés dans l'article. Soit $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ un ensemble fini de joueurs qui ont la possibilité de coopérer afin de mener à bien un projet commun. La coopération entre ces joueurs est formalisée par le biais de coalitions. Une coalition S est un élément de 2^N, l'ensemble des sous-ensembles de N. Nous noterons $\mathcal{N}$ l'ensemble des coalitions non vides de N. L'ensemble N est appelé la grande coalition. La fonction valeur des coalitions $v : 2^N \to \mathbb{R}$, telle que $v(\emptyset) = 0$, associe à chaque coalition $S \in 2^N$ la valeur $v(S) \in \mathbb{R}$ qu'elle crée lorsque ses membres se coalisent et coopèrent afin de réaliser le projet commun sans l'aide des joueurs extérieurs à S. Un jeu de coalitions à utilité transférable est un couple (N, v), où N est l'ensemble fini des joueurs et $v : 2^N \to \mathbb{R}$ est la fonction valeur des coalitions du jeu. Nous noterons (N, v^0) le jeu nul dans lequel $v(S) = 0$ pour tout $S \in \mathcal{N}$. Notons $\mathcal{C}_N$ l'ensemble des jeux de coalitions dont l'ensemble des joueurs est N, et $\mathcal{C} = \cup_N \mathcal{C}_N$, où les ensembles N sont des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$, l'ensemble des jeux de coalitions finis. Soit

$(N,\, v)$ un jeu de coalitions et $S \in \mathcal{N}$ une coalition. Nous noterons $(S,\, v_{|S})$ le sous-jeu de $(N,\, v)$ où $v_{|S}$ est la restriction de v à l'ensemble 2^S, c'est-à-dire $v_{|S}(T) = v(T)$ pour tout $T \in 2^S$. Nous noterons $\subseteq$ la relation d'inclusion et $\subset$ la relation d'inclusion stricte.

Un jeu $(N,\, v) \in \mathcal{C}$ est sur-additif si pour tout $S,\, T \subseteq N$ tels que $S \cap T = \emptyset$, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$. De tels jeux admettent des rendements d'échelle croissants : deux coalitions disjointes génèrent une valeur plus élevée lorsqu'elles coopèrent que lorsqu'elles agissent individuellement. Ceci signifie en particulier que $v(N)$ est la plus grande valeur du jeu. La classe des jeux de coalitions sur-additifs dont l'ensemble des joueurs est N est notée $\mathcal{C}_N^{SA}$. Un jeu sur-additif $(N,\, v) \in \mathcal{C}_N^{SA}$ est convexe si $v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$ pour tout $S,\, T \in \mathcal{N}$. Cette expression est difficilement interprétable. Shapley (1971) montre qu'elle se réécrit de la manière suivante : pour tout $i \in N$, $v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S)$ pour tout $S,\, T$ tels que $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$. Cette expression indique que la contribution marginale de chaque joueur ne décroît pas si la taille de la coalition qu'il rejoint augmente. La classe des jeux de coalitions convexes dont l'ensemble des joueurs est N est notée $\mathcal{C}_N^{C}$. Un jeu de coalitions $(N,\, v) \in \mathcal{C}$ est simple au sens de Dubey (1975) si $v(S) \in \{0,\, 1\}$ pour tout $S \in \mathcal{N}$. Une coalition est dite gagnante si elle obtient 1 et perdante si elle obtient 0. Nous noterons $\mathcal{C}_N^{S}$ la classe des jeux simples dont l'ensemble des joueurs est N et $\mathcal{C}_N^{SS}$ la classe des jeux sur-additifs simples dont l'ensemble des joueurs est N. La classe des jeux simples est très utile pour formaliser les situations de vote. Un jeu de Dirac, noté $(N,\, \delta_S)$, est un jeu simple défini de la manière suivante : soit $S \in \mathcal{N}$,

$$\delta_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S = T, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

Dans ce jeu, la coalition S est l'unique coalition gagnante. Un jeu de Dirac n'est ni sur-additif ni convexe, excepté δ_N, et réciproquement, un jeu simple sur-additif n'est pas un jeu de Dirac, excepté δ_N. Un jeu de contrôle est un jeu simple dans lequel la grande coalition est toujours gagnante. Notons qu'un jeu de contrôle n'est pas nécessairement sur-additif ni convexe. En revanche, un jeu simple convexe ou sur-additif non nul est un jeu de contrôle. La classe $\mathcal{C}_N^{JC}$ désigne la classe des jeux de contrôle dont l'ensemble des joueurs est N. Un jeu simple est monotone si $v(S) = 1$ implique $v(T) = 1$ pour tout $T \supset S$, c'est-à-dire que si une coalition est gagnante, toutes les coalitions qui la contiennent sont aussi gagnantes. Nous noterons $\mathcal{C}_N^{SM}$ la classe des jeux simples monotones dont l'ensemble des joueurs est N. Remarquons qu'un jeu simple monotone n'est pas nécessairement sur-additif ni convexe. En revanche, un jeu simple convexe ou sur-additif est monotone.

Notons aussi qu'un jeu simple monotone non nul est un jeu de contrôle. Enfin, un jeu à l'unanimité, noté $(N,\, u_S)$, est un jeu simple convexe défini de la manière suivante : soit $S \in \mathcal{N}$,

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \subseteq T, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Dans ce jeu, une coalition $T \in \mathcal{N}$ est gagnante si et seulement si elle contient la coalition S. Notons qu'un jeu convexe ou sur-additif simple n'est pas nécessairement un jeu à l'unanimité.

Considérons une classe de jeux de coalitions $C \subseteq \mathcal{C}_N$ munie d'une relation d'ordre partiel $\geq$ définie de la manière suivante : $v \geq w$ si et seulement si $v(S) \geq w(S)$ pour tout $S \subseteq N$. Pour tout $a,\, b \in \mathbb{R}$, notons $a \vee b = \max\{a,\, b\}$ et $a \wedge b = \min\{a,\, b\}$. Pour toute paire de jeux de coalitions $(N,\, v)$ et $(N,\, w)$ de C, définissons les jeux $(N,\, v \vee w)$ et $(N,\, v \wedge w)$ de la manière suivante : pour tout $S \subseteq N$,

$$v \vee w(S) = v(S) \vee w(S)$$

et

$$v \wedge w(S) = v(S) \wedge w(S).$$

Le jeu $(N,\, v \vee w)$ est le plus petit des majorants de $\{v,\, w\}$ et le jeu $(N,\, v \wedge w)$ est le plus grand des minorants de $\{v,\, w\}$. L'ordre partiel $(C,\, \leq)$ est un treillis si $v \vee w$ et $v \wedge w$ appartiennent à C.

Permuter un jeu consiste à échanger les rôles des joueurs. Soit $(N,\, v) \in \mathcal{C}$ un jeu de coalitions, et $\pi : N \to N$ une permutation de l'ensemble des joueurs. Dans le jeu permuté $(N,\, \pi v)$, le joueur $\pi(i)$ joue le même rôle que le joueur i dans le jeu $(N,\, v)$, et ce pour tout $i \in N$. Le jeu $(N,\, \pi v)$ est donc défini par :

$$\pi v(\{\pi(i_1),\, \pi(i_2),\, \ldots,\, \pi(i_s)\}) = v(S)$$

pour tout $S = \{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_s\} \in \mathcal{N}$.

Un support pour un jeu $(N,\, v) \in \mathcal{C}$ est une coalition $R \in \mathcal{N}$ telle que pour tout $S \in \mathcal{N}$, $v(S) = v(S \cap R)$. Cette définition appelle plusieurs remarques.

Remarque 1
Tout sur-ensemble d'un support est également un support. Choisissons $T \supset R$. Puisque R est un support, nous savons que $v(S) = v(S \cap R)$ pour tout $S \in \mathcal{N}$. De plus, $v(S \cap T) = v((S \cap T) \cap R) = v(S \cap R)$ pour tout $S \in \mathcal{N}$. Nous obtenons bien $v(S) = v(S \cap T)$ pour tout $S \in \mathcal{N}$.

Remarque 2
Les joueurs n'appartenant pas à R sont des joueurs dits "nuls", dans le

sens où leur contribution marginale à chacune des coalitions de N est nulle. Considérons $i \in N$ tel que $i \notin R$. Notons que pour tout $S \ni i$, $S \cap R = (S \setminus \{i\}) \cap R$. Nous obtenons $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = v(S \cap R) - v((S \setminus \{i\}) \cap R) = v(S \cap R) - v(S \cap R) = 0$ pour tout $S \ni i$.

Remarque 3
Une coalition composée uniquement de joueurs nuls ne peut pas être un support du jeu, sauf dans le jeu nul. Considérons (N, v) tel que $v \neq v^0$ et $T \subseteq N \setminus R$ un ensemble de joueurs nuls et montrons que la coalition T ne peut pas être un support. Choisissons $S \in \mathcal{N}$ telle que $S \cap T \neq \emptyset$ et $v(S) \neq 0$. Si T était un support, alors on aurait $v(S) = v(S \cap T) = 0$ puisqu'une coalition composée uniquement de joueurs nuls génère une valeur nulle. Nous obtenons une contradiction. Un même jeu ne peut donc pas contenir deux supports R et R' tels que $R \cap R' \neq \emptyset$, sauf (N, v^0).

Remarque 4
Un jeu admet un plus petit support. Notons $T \in \mathcal{N}$ l'ensemble des joueurs nuls, et montrons que $R = N \setminus T$ est le plus petit support du jeu. Supposons par contradiction qu'il existe un support $R' \subset R$, et choisissons $S \in \mathcal{N}$ tel que $R' \subset R \subset S$. Ceci signifie que $(S \cap R) \neq (S \cap R')$. Labélisons les joueurs de $S \cap (R \setminus R')$ de la façon suivante : $S \cap (R \setminus R') = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Puisque R est un support et qu'il ne contient pas de joueur nul, $v(S) = v(S \cap R) \neq v(S \cap (R \setminus \{i_1\})) \neq \ldots \neq v(S \cap (R \setminus \{i_1, \ldots, i_{k-1}\})) \neq v(S \cap R')$. Nous pouvons conclure que R' n'est pas un support et donc $R = N \setminus T$ est le plus petit support du jeu.

Soit $(N, v) \in \mathcal{C}$ un jeu de coalitions. Shapley (1953) montre qu'il existe des constantes réelles uniques α_S pour tout $S \in \mathcal{N}$ telles que :

$$v = \sum_{S \in \mathcal{N}} \alpha_S u_S.$$

Ces constantes sont données par :

$$\alpha_S = \sum_{T \subseteq S : T \neq \emptyset} (-1)^{|S|-|T|} v(T).$$

Une règle d'allocation détermine la façon dont les joueurs vont profiter individuellement des gains des coalitions. Formellement, une règle d'allocation définie sur une classe de jeux de coalitions C est une fonction $Y : C \to \mathbb{R}^N$ qui fait correspondre un unique vecteur d'allocation $Y(N, v) = (Y_i(N, v))_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ à chaque jeu de coalitions $(N, v) \in C$. Le vecteur $Y(N, v)$ décrit pour chaque joueur $i \in N$ l'allocation $Y_i(N, v) \in \mathbb{R}$ qu'il percevra dans le jeu (N, v).

2 Contribution marginale aux coalitions

La valeur de Shapley est une règle d'allocation pour les jeux de coalitions qui rémunère chaque joueur à hauteur de la moyenne de ses contributions marginales aux coalitions d'un jeu. Elle est le résultat d'une étude axiomatique menée par Shapley (1953) sur la classe des jeux de coalitions dont l'ensemble des joueurs est fixé. La caractérisation de l'auteur comporte trois axiomes. L'axiome d'anonymat repose sur un principe d'impartialité : il spécifie que l'allocation d'un joueur ne doit pas dépendre de son identité. L'axiome du support, qui indique que la valeur générée par la coopération de joueurs appartenant à un support doit leur être intégralement redistribuée, combine implicitement des principes d'équité et d'efficacité. Enfin, l'axiome d'additivité est un axiome de simplification : il indique que la règle d'allocation est un opérateur additif sur la classe de jeux considérée. Dans la caractérisation de Shapley (1953), la rémunération à la contribution marginale ne fait pas partie des propriétés explicitement désirables *a priori*, c'est une conséquence de l'axiomatique.

Shubik (1962) remanie la caractérisation de Shapley (1953). Premièrement, il remplace l'axiome d'anonymat par un axiome plus faible de traitement égalitaire des égaux, qui suppose que des joueurs contribuant de la même façon aux coalitions du jeu doivent recevoir la même allocation. L'auteur substitue donc un principe d'équité à un principe d'impartialité. Le critère marginaliste est utilisé ici pour assurer l'équité dans le traitement de joueurs présentant des caractéristiques identiques, mais reste silencieux pour les autres joueurs. L'axiome du support, présent dans la caractérisation de Shapley (1953), combine les principes d'efficacité et d'équité. Or, comme l'indique Thomson (2001), il est préférable qu'un axiome n'exprime qu'une seule idée. Shubik (1962) substitue à l'axiome du support deux nouveaux axiomes : l'axiome de balance et l'axiome de joueur nul. L'axiome de balance indique que l'allocation est efficace. L'axiome de joueur nul suppose que des joueurs ne contribuant ni positivement ni négativement aux coalitions doivent recevoir une allocation nulle. Dans l'axiome de joueur nul, le critère marginaliste est utilisé non seulement comme caractéristique pertinente pour comparer les joueurs, mais aussi pour calculer une rémunération équitable pour les joueurs considérés.

Nous verrons que si l'on restreint la classe de jeux considérée à certaines sous-classes de jeux comme, par exemple, la classe des jeux sur-additifs $\mathcal{C}_N^{SA}$ ou la classe des jeux simples $\mathcal{C}_N^{S}$, les caractérisations de Shapley (1953) et Shubik (1962) restent valables [1]. En revanche, si l'on considère la classe des

1. À l'origine, l'étude axiomatique de Shapley (1953) a été réalisée sur $\mathcal{C}_N^{SA}$.

jeux simples monotones $\mathcal{C}_N^{SM}$, la classe des jeux simples sur-additifs $\mathcal{C}_N^{SS}$ et la classe des jeux de contrôle $\mathcal{C}_N^{JC}$, ces caractérisations ne permettent plus de déterminer une allocation unique pour chaque joueur. Pour pallier ce problème, Dubey (1975) propose de remplacer l'axiome d'additivité, présent dans l'axiomatique de Shubik (1962), par un axiome de simplification plus faible : l'axiome de modularité. Il montre que cette nouvelle combinaison d'axiomes détermine une unique règle d'allocation sur $\mathcal{C}_N^{SM}$ et $\mathcal{C}_N^{SS}$, et que cette règle d'allocation est la valeur de Shapley. Feltkamp (1995) exhibe un résultat équivalent sur $\mathcal{C}_N^{JC}$, et étend le résultat de Dubey (1975) en montrant que cette caractérisation est aussi valable sur $\mathcal{C}_N^{S}$ et $\mathcal{C}_N$.

La caractérisation proposée par Young (1985) généralise l'application du critère marginaliste à l'ensemble des joueurs. L'axiome d'additivité est difficilement interprétable en termes d'équité et n'incorpore pas de critère marginaliste. Young (1985) remplace les axiomes de joueur nul et d'additivité par un axiome marginaliste plus faible qui indique que si les contributions marginales d'un joueur aux coalitions sont identiques dans deux jeux différents, mais de même taille, alors il recevra la même allocation dans ces deux jeux. Dans cette caractérisation, le critère marginaliste est le seul critère de rémunération des joueurs.

Chun (1989) propose de remplacer l'axiome marginaliste de Young (1985) par un axiome logiquement équivalent, l'axiome de contribution équivalente des coalitions. Supposons que l'on rééchelonne la valeur des coalitions contenant un certain groupe de joueurs. L'axiome de contribution équivalente des coalitions indique que l'allocation des joueurs n'appartenant pas à ce groupe de joueurs ne varie pas. Dans cet axiome, le critère marginaliste est utilisé pour assurer l'équité dans le traitement d'un joueur dont le rôle est identique dans deux jeux différents mais de même taille.

van den Brink (2001) propose quant à lui de remplacer l'axiome marginaliste de Young (1985), ou l'axiome de contribution équivalente des coalitions de Chun (1989), par un axiome logiquement indépendant : l'axiome d'équité. Supposons que l'on additionne à un premier jeu de coalitions un deuxième jeu dans lequel deux joueurs sont symétriques, c'est-à-dire dans lequel ils jouent le même rôle. L'axiome d'équité indique que cette opération a le même impact sur l'allocation des deux joueurs. L'auteur montre que sa caractérisation est plus faible que celles de Shapley (1953) et Shubik (1962).

Enfin, Casajus (2009) propose de remplacer l'axiome d'équité par un axiome équivalent de contributions marginales. Cet axiome indique que la différence de paiement de deux joueurs dans deux jeux de coalitions différents est intégralement déterminée par la différence de leurs contributions marginales à chacun des jeux. Cet axiome revêt, à notre avis, une interprétation plus naturelle que celui de van den Brink (2001).

2.1 Axiomatique de Shapley (1953)

Le premier axiome de la caractérisation de Shapley (1953) est l'axiome d'anonymat. Supposons que les joueurs de N échangent leurs rôles par le biais d'une permutation π. Ceci signifie que le joueur $\pi(i)$ jouera dans $(N, \pi v)$ le rôle du joueur i dans (N, v), et ce pour tout $i \in N$. L'axiome d'anonymat suggère que chaque joueur $\pi(i)$ du jeu permuté $(N, \pi v)$ recevra l'allocation du joueur i du jeu d'origine (N, v) dont il a pris la place. Cet axiome indique que l'allocation d'un joueur ne dépend pas de son label. Il traduit le principe d'impartialité.

Anonymat : une règle d'allocation $Y : C \to \mathbb{R}^N$ est anonyme si pour tout $(N, v) \in C$, pour toute permutation π de N et pour tout $i \in N$,

$$Y_{\pi(i)}(N, \pi v) = Y_i(N, v). \tag{3}$$

Le deuxième axiome est l'axiome du support. Il indique que la valeur générée par un support sera intégralement redistribuée aux joueurs de ce support. Nous verrons plus bas que cet axiome combine implicitement les principes d'efficacité et d'équité.

Support : une règle d'allocation $Y : C \to \mathbb{R}^N$ vérifie l'axiome du support si pour tout $(N, v) \in C$ et pour $R \in \mathcal{N}$, R support du jeu,

$$\sum_{i \in R} Y_i(N, v) = v(R). \tag{4}$$

Enfin, le troisième axiome est l'axiome d'additivité. Soient deux jeux de coalitions (N, v), (N, w) composés du même ensemble de joueurs. Créons un nouveau jeu de coalitions $(N, v + w)$ en additionnant les deux jeux précédents de la façon suivante : $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$ pour tout $S \in \mathcal{N}$. L'axiome d'additivité indique que l'allocation du jeu $(N, v + w)$ sera égale à la somme des allocations des deux jeux d'origine. C'est un axiome de simplification qui admet une interprétation économique simple. Imaginons un processus de production impliquant n joueurs et qui peut se diviser en deux étapes indépendantes : par exemple, (N, v) et (N, w) sont le résultat de deux étapes distinctes d'un même processus de production qui permet de produire $(N, v + w)$. L'axiome d'additivité indique qu'il revient au même de calculer la rémunération des joueurs après chaque étape du processus de production et d'en faire la somme, ou à l'issue de toutes les étapes. Ceci signifie aussi qu'il existe une indépendance temporelle, puisque la rémunération associée à chaque étape du processus de production est la même quel que soit l'ordre dans lequel on traite les étapes.

Additivité : une règle d'allocation $Y : C \to \mathbb{R}^N$ est additive si pour deux jeux de coalitions (N, v), $(N, w) \in C$ composés du même ensemble de joueurs N, alors $(N, v + w) \in C$ et :

$$Y(N, v + w) = Y(N, v) + Y(N, w). \tag{5}$$

Shapley (1953) montre que la combinaison de ces trois axiomes détermine une unique règle d'allocation, appelée valeur de Shapley.

Théorème 1 (Shapley (1953))
Une règle d'allocation $Y : \mathcal{C}_N \to \mathbb{R}^N$ satisfait les axiomes d'anonymat, du support et d'additivité si et seulement si c'est la valeur de Shapley, notée Sh, définie par :

$$Sh_i(N, v) = \sum_{S \in \mathcal{N} : i \in S} \frac{(|S| - 1)!(|N| - |S|)!}{|N|!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})] \tag{6}$$

pour tout $i \in N$.

L'expression (6) peut s'interpréter de la façon suivante. Supposons que la grande coalition se forme de manière séquentielle selon un ordre d'entrée. Chaque fois qu'un joueur $i \in N$ se joint à la coalition $S \setminus \{i\}$ déjà formée, on lui attribue une rémunération égale à sa contribution marginale à $S \setminus \{i\}$, c'est-à-dire qu'il reçoit $v(S) - v(S \setminus \{i\})$. De cette façon, on peut répartir l'intégralité de la valeur $v(N)$ entre les joueurs. Il y a $(|S| - 1)!$ ordres d'entrée possibles pour les joueurs de $S \setminus \{i\}$. Une fois que i s'est joint à la coalition $S \setminus \{i\}$, les joueurs de $N \setminus S$ entrent. Il y a $(|N| - |S|)!$ ordres d'entrée possibles pour ces joueurs. Il existe donc $(|S| - 1)!(|N| - |S|)!$ façons de faire entrer les joueurs de $S \setminus \{i\}$, puis i, et enfin les joueurs de $N \setminus S$. Le joueur i a donc $(|S| - 1)!(|N| - |S|)!$ possibilités de recevoir la rémunération $v(S) - v(S \setminus \{i\})$. En réitérant l'opération sur toutes les coalitions de N contenant i puis en divisant par le nombre total d'ordres d'entrée possibles des joueurs, c'est-à-dire $|N|!$, nous obtenons la moyenne des contributions marginales du joueur i aux coalitions de N.

Comme nous venons de le voir, la caractérisation de Shapley n'incorpore pas explicitement le critère marginaliste comme une propriété désirable *a priori*. Le fait que l'équité dans la rémunération des joueurs soit assurée par leur rémunération à hauteur de la moyenne de leur contribution marginale aux coalitions est le résultat de la combinaison des axiomes d'anonymat, du support et d'additivité. La caractérisation de Shubik (1962) est très proche de celle de Shapley (1953), cependant elle incorpore explicitement le critère marginaliste de contribution aux coalitions du jeu. De plus, elle décompose l'axiome du support, qui combine efficacité et équité, en deux axiomes reprenant chacune de ces idées isolément. Elle est aussi plus faible que celle de Shapley (1953).

2.2 Axiomatique de Shubik (1962)

L'axiome du joueur nul implique qu'un joueur nul, autrement dit un joueur qui ne contribue ni positivement ni négativement aux coalitions, obtiendra une rémunération nulle. Formellement, un joueur $i \in N$ d'un jeu (N, v) est nul si $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = 0$ pour chaque $S \subseteq N$, $S \ni i$. Dans cet axiome, le critère marginaliste est utilisé comme critère de comparaison des joueurs afin de les rémunérer de façon équitable.

Joueur nul : une règle d'allocation $Y : C \to \mathbb{R}^N$ vérifie l'axiome du joueur nul si pour tout $(N, v) \in C$ et pour tout joueur $i \in N$ nul,

$$Y_i(N, v) = 0. \tag{7}$$

L'axiome de balance signifie que la valeur de la grande coalition est entièrement redistribuée entre les joueurs, il traduit donc le principe d'efficacité.

Balance : une règle d'allocation $Y : C \to \mathbb{R}^N$ est balancée si pour tout $(N, v) \in C$ et pour tout joueur $i \in N$,

$$\sum_{i \in N} Y_i(N, v) = v(N).$$

Cet axiome appelle deux remarques concernant les jeux sur-additifs. Premièrement, nous pouvons noter que dans ce cas, l'axiome de balance garantit que la solution est optimale au sens de Pareto. Deuxièmement, remarquons que la valeur de Shapley d'un jeu sur-additif est une imputation, c'est-à-dire que $Sh_i(N, v) \geq v(\{i\})$, et $\sum_{i \in N} Sh_i(N, v) = v(N)$.

L'axiome de traitement égalitaire des égaux traduit l'idée qu'il est équitable que deux joueurs contribuant de la même manière à toutes les coalitions du jeu obtiennent une rémunération identique.

Traitement égalitaire des égaux : une règle d'allocation $Y : C \to \mathbb{R}^N$ vérifie l'axiome de traitement égalitaire des égaux si pour tout $(N, v) \in C$ et toute paire de joueurs $i, j \in N$ telle que $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ pour tout $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$,

$$Y_i(N, v) = Y_j(N, v). \tag{8}$$

Nous pouvons présenter un premier résultat concernant les relations logiques entre les caractérisations de Shapley (1953) et Shubik (1962).

Proposition 1
(i) Les axiomes du joueur nul et de balance, d'une part, et l'axiome du support, d'autre part, sont équivalents sur $\mathcal{C}_N$.
(ii) L'axiome d'anonymat implique l'axiome de traitement égalitaire des égaux sur $\mathcal{C}_N$.

Preuve :
(i) Vérifions tout d'abord que l'axiome du support implique les axiomes de joueur nul et de balance. Soit $(N, v) \in \mathcal{C}_N$ un jeu de coalitions tel que le plus petit support du jeu, noté R, soit strictement inclus dans N. Choisissons $j \in N$ tel que $j \in N \setminus R$. Nous savons que la contribution marginale du joueur $j \in N \setminus R$ à chaque coalition S du jeu est nulle. Cela est vrai pour tous les joueurs n'appartenant pas au support. La remarque 1 nous indique que tout sur-ensemble d'un support est un support, donc $R \cup \{j\}$ est aussi un support du jeu. Cela nous permet d'écrire :

$$\sum_{i \in R \cup \{j\}} Y_i(N, v) = v(R \cup \{j\}) = v(R) = \sum_{i \in R} Y_i(N, v),$$

où la deuxième égalité provient du fait que R est un support. L'équation précédente nous permet de conclure que $Y_j(N, v) = 0$ pour tout $j \in N \setminus R$. Ce résultat correspond à l'axiome du joueur nul. De plus, nous savons que

$$\sum_{i \in R} Y_i(N, v) = v(R) = v(R \cap N) = v(N).$$

En combinant cette égalité avec (7), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sum_{i \in N} Y_i(N, v) &= \sum_{i \in R} Y_i(N, v) + \sum_{i \in N \setminus R} Y_i(N, v) \\ &= \sum_{i \in R} Y_i(N, v) \\ &= v(N).\end{aligned}$$

Ce résultat correspond à l'axiome de balance.
Réciproquement, montrons que les axiomes de joueur nul et de balance impliquent l'axiome du support. Soit $(N, v) \in \mathcal{C}_N$ un jeu de coalitions. Notons $T \subseteq N$ l'ensemble des joueurs nuls du jeu. Nous savons que $R = N \setminus T$ est le plus petit support du jeu. Montrons que l'axiome du support est vérifié pour R et tous ses sur-ensembles. Par l'axiome du joueur nul, nous savons que

$$\sum_{i \in N} Y_i(N, v) = \sum_{i \in R} Y_i(N, v) + \sum_{i \in T} Y_i(N, v) = \sum_{i \in R} Y_i(N, v).$$

Puisque Y est balancée et R est un support, nous obtenons

$$\sum_{i \in R} Y_i(N, v) = v(N) = v(N \cap R) = v(R), \tag{9}$$

l'axiome du support est bien vérifié pour R. Considérons maintenant $R' \supset R$. La remarque 1 nous indique que tout sur-ensemble d'un support est un support. En combinant (9) et l'axiome du joueur nul nous savons que $Y_i(N, v) = 0$ pour tout $i \in R' \setminus R$, ce qui nous donne $\sum_{i \in R} Y_i(N, v) = \sum_{i \in R'} Y_i(N, v) = v(R)$. Enfin, $v(R) = v(R')$ puisque les joueurs de $R' \setminus R$ sont des joueurs nuls. Nous obtenons $\sum_{i \in R'} Y_i(N, v) = v(R')$. Nous avons bien montré que les axiomes de balance et du joueur nul impliquent l'axiome du support.
(ii) Montrons que l'axiome d'anonymat implique le traitement égalitaire des égaux. Considérons un jeu $(N, v) \in \mathcal{C}$ tel que pour $i_1, i_2 \in N$, $v(S \cup \{i_1\}) = v(S \cup \{i_2\})$ pour chaque coalition $S \subseteq N \setminus \{i_1, i_2\}$. Dans ce jeu, les joueurs i_1 et i_2 sont égaux : ils contribuent de la même façon à toutes les coalitions du jeu. Soit $\pi : N \to N$ une permutation des éléments de N telle que $\pi(i) = i$ pour tout $i \neq i_1, i_2$, $\pi(i_1) = i_2$ et $\pi(i_2) = i_1$. Définissons le jeu $(N, \pi v) \in \mathcal{C}$ où $\pi v(\pi(S)) = v(S)$ pour tout $S \in \mathcal{N}$. Vérifions que $(N, \pi v)$ et (N, v) sont identiques, c'est-à-dire que $\pi v(\pi(S)) = \pi v(S)$ pour tout $S \in \mathcal{N}$. Si $S \supseteq \{i_1, i_2\}$ ou $S \not\supseteq \{i_1, i_2\}$, nous savons que $\pi(S) = S$, donc $\pi v(\pi(S)) = \pi v(S)$. Supposons maintenant que $S \not\supseteq \{i_1, i_2\}$, et considérons les coalitions $S \cup \{i_1\}$ et $S \cup \{i_2\}$. Nous avons $\pi v(\pi(S \cup \{i_1\})) = \pi v(S \cup \{i_2\}) = v(S \cup \{i_1\})$ et $\pi v(\pi(S \cup \{i_2\})) = \pi v(S \cup \{i_1\}) = v(S \cup \{i_2\})$. Or nous savons que $v(S \cup \{i_1\}) = v(S \cup \{i_2\})$, nous pouvons en déduire que $\pi v(\pi(S \cup \{i_1\})) = \pi v(S \cup \{i_1\})$ et $\pi v(\pi(S \cup \{i_2\})) = \pi v(S \cup \{i_2\})$. Nous obtenons $\pi v(\pi(S)) = \pi v(S)$ pour tout $S \in \mathcal{N}$, ce qui nous permet de conclure que $\pi v = v$. Par l'axiome d'anonymat, $Y_{i_2}(N, \pi v) = Y_{i_1}(N, v)$ ce qui combiné au résultat précédent nous donne $Y_{i_1}(N, v) = Y_{i_2}(N, v)$. Ce résultat correspond à l'axiome de traitement égalitaire des égaux. ∎

L'axiome de traitement égalitaire des égaux n'implique pas l'axiome d'anonymat. Pour s'en convaincre, considérons l'exemple suivant.

Exemple 1
La règle d'allocation Y, définie par $Y_i(N, v) = v(\{1\})$ pour tout $i \in N$, vérifie l'axiome de traitement égalitaire des égaux sur $\mathcal{C}_N$. En revanche, elle ne vérifie pas l'axiome d'anonymat sur cette classe de jeux. En effet, posons $N = \{1, 2, 3\}$ et considérons le jeu (N, v) tel que :

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \in \{\{2\}, \{3\}\}, \\ 2 & \text{si } S = \{1\} \text{ ou } |S| > 1. \end{cases}$$

Dans ce jeu, les joueurs 2 et 3 sont égaux et Y leur attribue un paiement égal à 2. Réalisons la permutation suivante : $\pi(\{1\}) = 3$, $\pi(\{2\}) = 2$, $\pi(\{3\}) = 1$. Nous obtenons le jeu permuté $(N, \pi v)$ suivant :

$$\pi v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \in \{\{1\}, \{2\}\}, \\ 2 & \text{si } S = \{3\} \text{ ou } |S| > 1. \end{cases}$$

Dans ce jeu, ce sont les joueurs 1 et 2 qui sont égaux et Y leur attribue un paiement égal à 1. En revanche, $Y_3(N, \pi v) = 1 \neq Y_3(N, v) = 2$. Donc Y ne vérifie pas l'axiome d'anonymat. $\square$

Le théorème 2 indique que cette axiomatique, plus faible que celle de Shapley (1953), suffit à caractériser la valeur de Shapley.

Théorème 2 (Shubik (1962))
Une règle d'allocation $Y : \mathcal{C}_N \to \mathbb{R}^N$ satisfait l'additivité, le traitement égalitaire des égaux et les axiomes de balance et du joueur nul si et seulement si $Y = Sh$.

La caractérisation de Shubik (1962) est plus faible et plus facile à interpréter que celle de Shapley (1953). Le critère marginaliste est utilisé pour distinguer deux catégories de joueurs et les rémunérer équitablement, mais reste silencieux au sujet des autres joueurs.

Examinons maintenant la validité des caractérisations de Shapley (1953) et de Shubik (1962) lorsque l'on considère des sous-classes de $\mathcal{C}_N$. Nous savons qu'elles sont valables sur la classe des jeux sur-additifs $\mathcal{C}_N^{SA}$. Dubey (1975) indique que le théorème 1 reste valable sur la classe des jeux simples $\mathcal{C}_N^S$. Neyman (1989) montre que ces caractérisations sont aussi valables sur des classes de jeux construites à partir d'un jeu et de ses sous-jeux. De plus, comme nous l'avons vu plus haut, Shapley (1953) montre que la combinaison des axiomes d'anonymat et de support détermine de manière unique la valeur de Shapley pour sur la classe des jeux à l'unanimité dont l'ensemble des joueurs est fixé.

Cependant, comme le montre Dubey (1975), il existe des sous-classes de $\mathcal{C}_N$ pour lesquelles les caractérisations de Shapley (1953) et de Shubik (1962) ne garantissent plus l'unicité de la règle d'allocation. Considérons par exemple la classe des jeux simples monotones $\mathcal{C}_M^{SM}$. Choisissons un jeu simple monotone qui ne soit pas un jeu à l'unanimité. Prenons par exemple le jeu (N, v) tel que $v(N) = v(N \setminus \{i\}) = v(N, \setminus\{j\})$, et $v(S) = 0$ sinon. Par l'axiome de traitement égalitaire des égaux, nous savons que i et j recevront la même allocation, que nous noterons c. Par les axiomes de balance et de traitement égalitaire des égaux, les autres joueurs $k \neq i, j$ recevront $Y_k(N, v) = (1 - 2c)/|N \setminus \{i, j\}|$. La combinaison de ces deux axiomes sur ce type de jeux ne permet pas d'assurer l'unicité de l'allocation des joueurs. Voyons maintenant s'il est possible de décomposer (N, v) en une somme de jeux appartenant à $\mathcal{C}_N^{SM}$ et pour lesquels la combinaison des axiomes de traitement égalitaire des égaux, de joueur nul et de balance suffit à déterminer une expression de la valeur de Shapley. Choisissons (N, v'), $(N, v'') \in \mathcal{C}_N^{SM}$, tels que $v' + v'' = v$. Nous avons $v'(N) + v''(N) = v(N)$. Or si $v'(N) = 1$, alors $v(N) = 1$, et dans ce cas $v''(N) = 0$ et $v'' = v^0$, ce qui implique $v' = v$. Nous pouvons mener un raisonnement similaire si $v''(N) = 1$, dans ce cas $v' = v^0$ et $v'' = v$. Supposons maintenant que $v' = v'' + v$. Si $v'(N) = v''(N) = 1$, alors $v(N) = 0$ et donc $v = v^0$, et nous obtenons $v' = v''$. Si $v'(N) = v(N) = 1$, alors $v''(N) = 0$, ce qui implique $v'' = v^0$ et $v' = v$. Il n'est donc pas possible de décomposer un jeu (N, v) de la classe $\mathcal{C}_N^{SM}$ en une somme de jeux de $\mathcal{C}_N^{SM}$ autres que (N, v^0) et (N, v), ce qui est insuffisant pour déterminer la valeur de Shapley de (N, v). Ce raisonnement est aussi valable sur $\mathcal{C}_N^{SS}$.

2.3 Axiomatique de Dubey (1975)

Dubey (1975) propose de remplacer l'axiome d'additivité par un axiome de simplification plus faible, l'axiome de modularité. Comme l'axiome d'additivité, cet axiome est difficile à interpréter en termes marginalistes. En revanche, il admet une interprétation économique simple. Considérons un processus de production composé de deux étapes indépendantes (N, v) et (N, w), et suposons que les joueurs soient rémunérés à l'issue de chacune de ces étapes. L'axiome de modularité indique que le fait de réorganiser le processus de production en deux nouvelles étapes $(N, v \vee w)$ et $(N, w \wedge w)$ et de les rémunérer à l'issue de chacune de ces nouvelles étapes ne modifie pas les paiements des joueurs.

Modularité : une règle d'allocation Y définie sur un treillis $(C, \leq)$ est modulaire si pour toute paire de jeux (N, v) et (N, w) de C composés du même ensemble de joueurs,

$$Y(N,\, v \vee w) + Y(N,\, v \wedge w) = Y(N,\, v) + Y(N,\, w).$$

Proposition 2 (Feltkamp (1995))
L'axiome d'additivité implique l'axiome de modularité sur $\mathcal{C}_N$.

Preuve : Considérons deux jeux de coalitions $(N,\, v)$ et $(N,\, w)$ de $\mathcal{C}_N$ et une règle d'allocation Y additive :

$$\begin{aligned} Y(N,\, v \vee w) + Y(N,\, v \wedge w) &= Y(N,\, v \vee w + v \wedge w) \\ &= Y(N,\, v + w) \\ &= Y(N,\, v) + Y(N,\, w), \end{aligned}$$

donc Y est bien modulaire. ■

L'exemple 2 montre que la réciproque est fausse.

Exemple 2
Considérons la famille de règles d'allocations définies de la façon suivante : $Y_i^a(N,\, v) = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}_{++}$, tout $(N,\, v) \in \mathcal{C}_N$ et tout $i \in N$. Il est facile de vérifier que les règles d'allocations de cette classe sont modulaires mais pas additives. □

Dubey (1975) obtient les deux résultats suivants.

Théorème 3 (Dubey (1975))
(i) Une règle d'allocation $Y : \mathcal{C}_N^{SM} \to \mathbb{R}^N$ satisfait les axiomes de modularité, de traitement égalitaire des égaux, de balance et de joueur nul si et seulement si $Y = Sh$.
(ii) Une règle d'allocation $Y : \mathcal{C}_N^{SS} \to \mathbb{R}^N$ satisfait les axiomes de modularité, de traitement égalitaire des égaux, de balance et de joueur nul si et seulement si $Y = Sh$.

Feltkamp (1995) soulève le même type de problème au sujet des jeux de contrôle $\mathcal{C}_N^{JC}$. Il obtient les résultats suivants.

Théorème 4 (Feltkamp (1995))
(i) Une règle d'allocation $Y : \mathcal{C}_N^{JC} \to \mathbb{R}^N$ satisfait les axiomes de modularité, de traitement égalitaire des égaux, de balance et de joueur nul si et seulement si $Y = Sh$.
(i) Une règle d'allocation $Y : \mathcal{C}_N^{S} \to \mathbb{R}^N$ satisfait les axiomes de modularité, de traitement égalitaire des égaux, de balance et de joueur nul si et seulement si $Y = Sh$.
(ii) Une règle d'allocation $Y : \mathcal{C}_N \to \mathbb{R}^N$ satisfait les axiomes de modularité, de traitement égalitaire des égaux, de balance et de joueur nul si et seulement si $Y = Sh$.

2.4 Axiomatique de Young (1985)

L'axiome marginaliste de Young (1985) indique que l'allocation d'un joueur dépend uniquement de ses contributions marginales aux coalitions du jeu. Cet axiome suppose que si les contributions marginales d'un joueur sont identiques dans deux jeux différents mais de même taille, alors le joueur obtiendra une même allocation dans ces deux jeux.

Marginalisme : une règle d'allocation $Y : C \to \mathbb{R}^N$ vérifie l'axiome marginaliste si pour deux jeux de coalitions (N, v), $(N, w) \in C$ composés du même ensemble de joueurs N et tout $i \in N$ tels que :

$$v(S) - v(S \setminus \{i\}) = w(S) - w(S \setminus \{i\})$$

pour tout $S \subseteq N$, $S \ni i$, nous avons

$$Y_i(N, v) = Y_i(N, w).$$

Nous pouvons établir deux nouvelles relations entre les axiomes présentés dans cette section. Premièrement, nous montrons que les axiomes de traitement égalitaire des égaux, de balance et l'axiome marginaliste impliquent l'axiome du joueur nul. Ensuite, nous montrons, à l'instar de Young (1985), que les axiomes d'additivité et de joueur nul impliquent l'axiome marginaliste.

Proposition 3
Les axiomes de traitement égalitaire des égaux, de balance et l'axiome marginaliste impliquent l'axiome du joueur nul sur $\mathcal{C}_N$.

Preuve : Considérons le jeu nul (N, v^0) tel que $v^0(S) = 0$ pour toutes les coalitions $S \in \mathcal{N}$. Cela signifie que pour tout $i \in N$, $v^0(S) - v^0(S \setminus \{i\}) = 0$ pour chaque coalition $S \in \mathcal{N}$, autrement dit tous les joueurs de (N, v^0) sont des joueurs nuls. Par l'axiome de traitement égalitaire des égaux, $Y_i(N, v^0) = Y_j(N, v^0)$ pour tout i, $j \in N$. Par l'axiome de balance, $\sum_{i \in N} Y_i(N, v^0) = 0$, ce qui implique que $Y_i(N, v^0) = 0$ pour tout $i \in N$. Enfin, en utilisant l'axiome marginaliste, nous pouvons conclure que pour tout jeu $(N, v) \in \mathcal{C}_N$, si $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = 0$ pour $i \in N$ et pour tout $S \ni i$, alors $Y_i(N, v) = Y_i(N, v^0) = 0$. Nous obtenons bien l'axiome du joueur nul. ■

La réciproque n'est pas vraie. Pour s'en convaincre, considérons l'exemple suivant.

Exemple 3
La règle d'allocation $Y_i(N, v) = v(\{i\})$ pour tout $i \in N$ vérifie l'axiome

du joueur nul, puisque si $i \in N$ est un joueur nul, $v(\{i\}) = 0$, l'axiome marginaliste, puisque $v(S)-v(S\setminus\{i\}) = w(S)-w(S\setminus\{i\})$ implique $v(\{i\}) = w(\{i\})$, et l'axiome de traitement égalitaire des égaux sur $\mathcal{C}_N$. En revanche, elle n'est pas balancée. $\square$

Proposition 4 (Young (1985))
Les axiomes d'additivité et de joueur nul impliquent l'axiome marginaliste sur $\mathcal{C}_N$.

Preuve : Considérons les jeux (N, v) et (N, w) de $\mathcal{C}_N$, tels que pour le joueur $i \in N$, $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = w(S) - w(S \setminus \{i\})$ pour tout $S \subseteq N$, $S \ni i$. Le joueur i est un joueur nul dans le jeu $(N, v - w)$, puisque $v(S) - w(S) = v(S \setminus \{i\}) - w(S \setminus \{i\})$ pour tout $S \subseteq N$, $S \ni i$. Par l'axiome du joueur nul, il recevra un paiement nul dans le jeu $(N, v - w)$. Nous obtenons $Y_i(N, v - w) = 0 = Y_i(N, v) + Y_i(N, -w)$. Notons que Y_i est impaire. En effet, $Y_i(N, w + (-w)) = 0 = Y_i(N, w) + Y_i(N, -w)$ puisque i est un joueur nul dans $w + (-w)$, ce qui implique que $Y_i(N, w) = -Y_i(N, -w)$ et donc $Y_i(N, -w) = -Y_i(N, w)$. Nous obtenons bien $Y_i(N, v) = Y_i(N, w)$. Ceci correspond à l'axiome marginaliste. $\blacksquare$

La réciproque de cette assertion est fausse. Vérifions-le à l'aide d'un exemple.

Exemple 4 (Young (1985))
Les arguments utilisés dans l'exemple 3 permettent de conclure que la règle d'allocation $Y_i(N, v) = v(\{i\})^2$ vérifie l'axiome marginaliste et l'axiome du joueur nul sur $\mathcal{C}_N$. En revanche, elle n'est pas additive. $\square$

Young (1985) montre que la combinaison des axiomes de traitement égalitaire des égaux, de balance et de l'axiome marginaliste suffit à caractériser la valeur de Shapley sur $\mathcal{C}_N$.

Théorème 5 (Young (1985))
Une règle d'allocation $Y : \mathcal{C}_N \to \mathbb{R}^N$ satisfait le traitement égalitaire des égaux, l'axiome de balance et l'axiome marginaliste si et seulement si c'est la valeur de Shapley.

Young (1985) indique que cette caractérisation reste valable sur $\mathcal{C}_N^{SA}$.

L'exemple 4 montre que la caractérisation de Young (1985) est plus faible que celle de Shubik (1962). Remarquons que les axiomes marginaliste et de balance ne sont pas suffisants pour obtenir la valeur de Shapley, l'axiome de traitement égalitaire des égaux est aussi nécessaire. L'intérêt de la caractérisation de Young (1985) est que le critère marginaliste est le seul critère mobilisé pour redistribuer $v(N)$.

2.5 Axiomatique de Chun (1991)

Chun (1991) propose de remplacer l'axiome marginaliste de Young (1985) par un axiome de contribution équivalente des coalitions. Considérons un jeu (N, v) et rééchelonnons la valeur des coalitions contenant un certain groupe de joueurs. L'axiome de contribution équivalente des coalitions indique que les allocations des joueurs qui n'appartiennent pas à ce groupe ne sont pas affectées. On peut penser à première vue que l'axiome de Chun (1991) est plus faible que l'axiome marginaliste de Young (1985). En effet, l'axiome marginaliste met en cohérence les paiements d'un joueur pour tous les jeux dans lesquels ses contributions marginales sont identiques. L'axiome de contribution équivalente des coalitions met en cohérence les paiements d'un joueur pour certains jeux dans lesquels ses contributions marginales sont identiques : ceux pour lesquels seule la valeur des coalitions contenant un certain groupe de joueurs est rééchelonnée. Or, comme nous le verrons plus bas, ces deux axiomes sont équivalents.

Contribution équivalente des coalitions : une règle d'allocation $Y : C \to \mathbb{R}^N$ vérifie l'axiome de contribution équivalente des coalitions si pour toute paire de jeux (N, v), $(N, w) \in C$, tout $S \in \mathcal{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $v = w + \alpha\, u_S$, alors $(N, \alpha\, u_S) \in C$ et :

$$Y_i(N, v) = Y_i(N, w)$$

pour tout $i \in N \setminus S$.

Chun (1989) montre que l'axiome marginaliste implique l'axiome de contribution équivalente des coalitions.

Proposition 5 (Chun (1989))
L'axiome marginaliste implique l'axiome de contribution équivalente des coalitions sur $\mathcal{C}_N$.

Preuve : Soit Y une règle d'allocation satisfaisant l'axiome marginaliste. Choisissons deux jeux (N, v), $(N, w) \in \mathcal{C}_N$ tels que $v = w + \alpha\, u_S$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous pouvons facilement vérifier que $v(T) - v(T \setminus \{i\}) = w(T) - w(T \setminus \{i\})$ pour tout $i \in N \setminus S$, et tout $T \ni i$. L'axiome marginaliste nous permet de conclure que $Y_i(N, v) = Y_i(N, w)$ pour tout $i \in N \setminus S$, ce qui correspond à l'axiome de contribution équivalente des coalitions. ■

Casajus et Huettner (2008) montrent que l'axiome de contribution équivalente des coalitions implique l'axiome marginaliste sur $\mathcal{C}_N$. Pour cela, ils établissent d'abord le lemme suivant.

Lemme 1 (Casajus et Huettner (2008))
Pour tout $i \in N$, nous avons $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = w(S) - v(S \setminus \{i\})$ pour tout $S \in \mathcal{N}$ tel que $i \in S$ si, et seulement si, $\alpha_S^v = \alpha_S^w$ pour tout $S \in \mathcal{N}$ tel que $i \in S$.

Proposition 6 (Casajus et Huettner (2008))
L'axiome de contribution équivalente des coalitions implique l'axiome marginaliste sur $\mathcal{C}_N$.

Preuve : Soit une règle d'allocation $Y : \mathcal{C}_N \to \mathbb{R}$ qui vérifie l'axiome de contribution équivalente des coalitions. Considérons un joueur $i \in N$ et et deux jeux (N, v) et (N, w) de $\mathcal{C}_N$ tels que $v(S)-v(S\setminus\{i\}) = w(S)-w(S\setminus\{i\})$ pour tout $S \in \mathcal{N}$ tel que $i \in S$. Définissons le jeu (N, q) de la manière suivante :

$$q = v - \sum_{\substack{T \subseteq N\setminus\{i\} \\ T \neq \emptyset}} \alpha_T^v \, u_T.$$

Par le lemme 1, nous savons que $\sum_{\substack{S\in\mathcal{N} \\ S\ni i}} \alpha_S^v = \sum_{\substack{S\in\mathcal{N} \\ S\ni i}} \alpha_S^w$, ce qui nous donne :

$$q = w - \sum_{\substack{T \subseteq N\setminus\{i\} \\ T \neq \emptyset}} \alpha_T^w \, u_T.$$

La deuxième égalité s'obtient par le lemme 1. Indexons les coalitions telles que $T \subseteq N\setminus\{i\}$ par les éléments de $\{1, \ldots, 2^{|N|-1}\}$. L'axiome de contribution équivalente des coalitions nous donne :

$$\begin{aligned}
Y_i(N, v) &= Y_i(N, v - \alpha_{T_1}^v \, u_{T_1}) \\
&= Y_i(N, v - \alpha_{T_1}^v \, u_{T_1} - \alpha_{T_2}^v \, u_{T_2}) \\
&\vdots \\
&= Y_i(N, v - \sum_{t=1}^{2^{|N|-1}-1} \alpha_{T_t}^v \, u_{T_t}) \\
&= Y_i(N, q).
\end{aligned}$$

En procédant de la même manière, on obtient $Y_i(N, w) = Y_i(N, q)$, ce qui montre que l'axiome de contribution équivalente des coalitions implique l'axiome de marginalisme. ■

Puisqu'une règle d'allocation vérifiant l'axiome marginaliste ou les axiomes de joueur nul et d'additivité vérifie aussi l'axiome de contribution équivalente des coalitions, nous pouvons conclure que la valeur de Shapley vérifie l'axiome de contribution équivalente des coalitions. Chun (1991) fournit le résultat suivant.

Théorème 6 (Chun (1991))
Une règle d'allocation $Y : \mathcal{C}_N \to \mathbb{R}^N$ vérifie les axiomes de balance, de traitement égalitaire des égaux et de contribution équivalente des coalitions si et seulement si $Y = Sh$.

Les caractérisations de Chun (1991) et Young (1985) sont équivalentes, ce qui signifie que la caractérisation de Chun (1991) est plus faible que celles de Shapley (1953) et Shubik (1962).

2.6 Axiomatique de van den Brink (2001)

van den Brink (2001) propose de remplacer l'axiome marginaliste de Young (1985) par un autre axiome. Il s'agit de l'axiome d'équité. L'idée est la suivante : le fait d'additionner à un jeu de coalitions (N, v) un jeu (N, w) dans lequel les joueurs i et j de N sont symétriques a le même impact sur le paiement des deux joueurs. L'interprétation de cet axiome nous semble moins naturelle que celle de l'axiome marginaliste de Young (1985). Comme nous le verrons plus bas, Casajus (2009) fournit un axiome équivalent à celui de van den Brink (2001) mais dont l'interprétation est plus naturelle.

Équité : une règle d'allocation $Y : C \to \mathbb{R}^N$ vérifie l'axiome d'équité si pour tout $(N, w) \in C$ tel que $i, j \in N$ sont égaux et tout $(N, v) \in C$, alors $(N, v + w) \in C$ et

$$Y_i(N, v + w) - Y_i(N, v) = Y_j(N, v + w) - Y_j(N, v).$$

van den Brink (2001) montre que les axiomes de traitement égalitaire des égaux et d'additivité impliquent l'axiome d'équité, et les axiomes de joueur nul et d'équité impliquent l'axiome de traitement égalitaire des égaux sur $\mathcal{C}_N$.

Proposition 7 (van den Brink (2001))
(i) Les axiomes de traitement égalitaire des égaux et d'additivité impliquent l'axiome d'équité sur $\mathcal{C}_N$.
(ii) Les axiomes de joueur nul et d'équité impliquent l'axiome de traitement égalitaire des égaux sur $\mathcal{C}_N$.

Preuve :
(i) Supposons que Y satisfasse les axiomes de traitement égalitaire des égaux

et d'additivité. Soit $(N, w) \in \mathcal{C}_N$ un jeu de coalitions tel que $i, j \in N$ sont égaux. Nous avons :

$$\begin{aligned} Y_i(N, v+w) - Y_i(N, v) &= Y_i(N, v) + Y_i(N, w) - Y_i(N, v) \\ &= Y_i(N, w) \\ &= Y_j(N, w) \\ &= Y_j(N, v+w) - Y_j(N, v) \end{aligned}$$

La première égalité s'obtient par l'axiome d'additivité, la troisième par l'axiome de traitement égalitaire des égaux et la quatrième par les mêmes arguments que les deux premières. Nous obtenons bien l'axiome d'équité.
(ii) Montrons maintenant que l'axiome de traitement égalitaire des égaux se déduit des axiomes de joueur nul et d'équité. Soit $(N, w) \in \mathcal{C}_N$ tel que $i, j \in N$ sont égaux. Par l'axiome d'équité, nous pouvons écrire $Y_i(N, v^0 + w) - Y_i(N, v^0) = Y_j(N, v^0 + w) - Y_j(N, v^0)$. Or $v^0 + w = w$ et puisque i et j sont nuls dans (N, v^0), nous obtenons $Y_i(N, w) = Y_j(N, w)$. ■

van den Brink (2001) indique que l'axiome d'équité n'implique ni l'axiome de traitement égalitaire des égaux ni l'axiome d'additivité. Vérifions cette assertion à l'aide de l'exemple suivant.

Exemple 5 (van den Brink (2001))
Considérons la règle d'allocation Y définie par

$$Y_i(N, v) = \begin{cases} Sh_i(N, v) + 1 & \text{si } i = 1, \\ Sh_i(N, v) - \frac{1}{|N|-1} & \text{si } i \in N \setminus \{1\}. \end{cases} \tag{10}$$

Cette règle d'allocation vérifie l'axiome d'équité. En effet, supposons que 1 et k soient égaux dans le jeu $(N, w) \in \mathcal{C}_N$, alors pour tout $(N, v) \in \mathcal{C}_N$,

$$\begin{aligned} Y_1(N, v+w) - Y_1(N, v) &= Sh_1(N, v+w) + 1 - Sh_1(N, v) - 1 \\ &= Sh_1(N, v) + Sh_1(N, w) - Sh_1(N, v) \\ &= Sh_1(N, w) \\ &= Sh_k(N, w) \\ &= Y_k(N, v+w) - Y_k(N, v) \end{aligned}$$

La première égalité s'obtient par l'axiome d'équité, la deuxième par l'additivité de la valeur de Shapley, la quatrième par le fait que 1 et k sont égaux dans (N, w), et la dernière par les mêmes arguments que les trois premières. Nous pouvons vérifier de la même façon que ce résultat tient pour $i, j \in N \setminus \{1\}$ égaux, ce qui nous permet de conclure que Y vérifie l'axiome d'équité. En revanche, elle ne vérifie pas l'axiome de traitement égalitaire des égaux. En effet, supposons que 1 et k soient égaux dans (N, v). Par (10), nous obtenons $Y_1(N, v) \neq Y_k(N, v)$. La règle d'allocation Y n'est pas non plus additive, puisque $Y_1(N, v+w) = Sh_1(N, v+w) + 1 = Sh_1(N, v) + Sh_1(N, w) + 1 \neq Sh_1(N, v) + 1 + Sh_1(N, w) + 1 = Y_1(N, v) + Y_1(N, w)$. $\square$

Enfin, van den Brink (2001) montre à l'aide de l'exemple suivant que l'axiome marginaliste de Young (1985) n'implique pas l'axiome d'équité, et réciproquement.

Exemple 6 (van den Brink (2001))
La règle égalitaire $Y : \mathcal{C}_N \to \mathbb{R}^N$ définie par $Y_i(N, v) = v(N)/|N|$ pour tout $i \in N$ vérifie l'axiome d'équité mais pas l'axiome marginaliste. La règle d'allocation $Y : \mathcal{C}_N \to \mathbb{R}^N$ définie par $Y_1(N, v) = Sh_1(N, v)$ et $Y_i(N, v) = 0$ pour tout $i \in N \setminus \{1\}$ satisfait l'axiome marginaliste mais pas l'axiome d'équité. $\square$

Puisqu'une règle d'allocation vérifiant les axiomes de traitement égalitaire des égaux et d'additivité vérifie aussi l'axiome d'équité, nous pouvons en conclure que la valeur de Shapley vérifie l'axiome d'équité. Nous pouvons énoncer le résultat de van den Brink (2001).

Théorème 7 (van den Brink (2001))
Une règle d'allocation $Y : \mathcal{C}_N \to \mathbb{R}^N$ vérifie les axiomes de balance, de joueur nul et d'équité si et seulement si $Y = Sh$.

van den Brink (2001) montre que ce résultat reste valable sur la classe $\mathcal{C}_N^S$. Casajus (2009) montre que cette caractérisation de la valeur de Shapley est aussi valable sur certaines sous-classes de $\mathcal{C}_N$, dont la classe des jeux sur-additifs $\mathcal{C}_N^{SA}$ et la classe des jeux convexes $\mathcal{C}_N^C$.

2.7 Axiomatique de Casajus (2009)

Casajus (2009) propose de substituer à l'axiome d'équité un axiome logiquement équivalent, mais dont l'interprétation est plus naturelle. Il s'agit de l'axiome de contributions marginales. Cet axiome indique que la différence de paiements de deux joueurs dans deux jeux de coalitions différents est intégralement déterminée par la différence de leurs contributions marginales aux coalitions de chacun des jeux.

Contributions marginales : une règle d'allocation $Y : C \to \mathbb{R}^N$ satisfait l'axiome de contribution marginale si pour tout (N, v) et (N, w) de C tels que :

$$[v(S\cup\{i\})-v(S)]-[v(S\cup\{j\})-v(S)] = [w(S\cup\{i\})-w(S)]-[w(S\cup\{j\})-w(S)]$$

pour tout $S \subseteq N \setminus \{i,\, j\}$ alors $(N,\, v+w) \in C$ et :

$$Y_i(N,\, v) - Y_j(N,\, v) = Y_i(N,\, w) - Y_j(N,\, w).$$

Casajus (2009) obtient l'équivalence suivante.

Proposition 8 (Casajus (2009))
L'axiome de contributions marginales et l'axiome d'équité sont équivalents sur $\mathcal{C}_N$.

Preuve : Voyons tout d'abord comment l'auteur montre que l'axiome de contributions marginales implique l'axiome d'équité sur $\mathcal{C}_N$. Soit Y une règle d'allocation satisfaisant l'axiome de contributions marginales. Considérons $(N,\, v)$ et $(N,\, w)$ de $\mathcal{C}_N$, tels que $i,\, j \in N$ sont égaux dans $(N,\, w)$. Nous savons que $[(v+w)(S\cup\{i\})-(v+w)(S)]-[(v+w)(S\cup\{j\})-(v+w)(S)] = [v(S\cup\{i\})-v(S)]-[v(S\cup\{j\})-v(S)]$ pour tout $S \subseteq N\setminus\{i,\, j\}$. Par l'axiome de contributions marginales, nous avons : $Y_i(N,\, v+w) - Y_j(N,\, v+w) = Y_i(N,\, v) - Y_j(N,\, v)$, ce qui correspond à l'axiome d'équité.
Montrons maintenant que l'axiome d'équité implique l'axiome de contributions marginales sur $\mathcal{C}_N$. Soit Y une règle d'allocation satisfaisant l'axiome d'équité. Considérons $(N,\, v)$ et $(N,\, w)$ de $\mathcal{C}_N$, tels que $[v(S\cup\{i\}) - v(S)] - [v(S\cup\{j\}) - v(S)] = [w(S\cup\{i\}) - w(S)] - [w(S\cup\{j\}) - w(S)]$ pour tout $S \subseteq N \setminus \{i,\, j\}$. Nous savons que $[(v-w)(S\cup\{i\}) - (v-w)(S)] - [(v-w)(S\cup\{j\}) - (v-w)(S)] = 0$ pour tout $S \subseteq N \setminus \{i,\, j\}$. Autrement dit, i et j sont symétriques dans $(N,\, v-w)$. En appliquant l'axiome d'équité, nous obtenons : $Y_i(N,\, v) - Y_i(N,\, w) = Y_i(N,\, w+(v-w)) - Y_i(N,\, w) = 0 = Y_i(N,\, w+(v-w)) - Y_j(N,\, w) = Y_j(N,\, v) - Y_j(N\, w)$, ce qui correspond à l'axiome de contributions marginales. ■

Casajus (2009) obtient le résultat suivant.

Théorème 8 (Casajus (2009))
Une règle d'allocation $Y : \mathcal{C}_N \to \mathbb{R}^N$ vérifie les axiomes de balance, de joueur nul et de contributions marginales si et seulement si $Y = Sh$.

La caractérisation de Casajus (2009) est donc équivalente à celle de van den Brink (2001).

Les axiomatiques de Young (1985), Chun (1991), van den Brink (2001) et Casajus (2009) permettent de caractériser la valeur de Shapley sans avoir recours à un axiome de simplification. Les caractérisations de Chun (1991) et Young (1985), d'une part, et celles de Casajus (2009) et van den Brink (2001), d'autre part, sont indépendantes. Les caractérisations de Chun (1991) et Young (1985) sont équivalentes, tout comme celles de Casajus (2009) et van den Brink (2001). Enfin, toutes ces caractérisations sont plus faibles que celles de Shapley (1953) et Shubik (1962).

Les caractérisations que nous avons présentées jusqu'à présent sont valables sur $\mathcal{C}_N$, et ce pour tout N. Ceci implique que les différents concepts contenus dans les axiomatiques sont toujours exprimés pour des jeux de coalitions dont l'ensemble des joueurs est fixe. Nous introduisons dans la section suivante deux caractérisations dans lesquelles le critère marginaliste est utilisé pour mettre en relation des jeux de taille différente. Le critère marginaliste y sera défini comme la contribution marginale des joueurs à un jeu de coalitions.

3 Contribution marginale à un jeu

Myerson (1980) caractérise la valeur de Shapley sur la classe $\mathcal{C}$ à l'aide de deux axiomes : l'axiome de balance et l'axiome de contributions marginales balancées. Le critère marginaliste est présent dans cette caractérisation sous la forme de la contribution marginale des joueurs à un jeu. Plus précisément, la contribution marginale d'un joueur à un jeu est mesurée par la contribution marginale de ce joueur à l'allocation de chaque autre joueur. Nous dirons que les contributions marginales de deux joueurs, disons i et j, sont balancées si la contribution marginale du joueur i à l'allocation du joueur j est égale à la contribution marginale du joueur j à l'allocation du joueur i, et ce pour chaque paire de joueur i, j de N. Cet axiome peut aussi s'interpréter de la manière suivante : la variation d'allocation que le joueur i menace de faire subir au joueur j en se retirant du jeu est égale à la variation d'allocation que le joueur j menace de faire subir au joueur i en se retirant du jeu sont égales, et ce pour chaque paire de joueurs i, j de N. L'axiome de contributions marginales balancées suppose donc que les joueurs d'un même jeu ont tous le même pouvoir de négociation, ce qui est une hypothèse forte. Cet axiome n'indique pas pas que les joueurs doivent être rémunérés à hauteur de leur contribution marginale au jeu, il indique seulement le caractère balancé de leurs contributions marginales pour chaque paire de joueurs et incorpore le principe d'équité.

Hart et Mas-Colell (1989) proposent une caractérisation dans laquelle la contribution marginale des joueurs au jeu est évaluée par le biais d'une fonction, appelée potentiel, qui associe un réel à chaque jeu de $\mathcal{C}$. La contribution marginale d'un joueur à un jeu est égale à la différence entre le potentiel du jeu et le potentiel du sous-jeu privé du joueur en question. Le potentiel est construit de façon à ce que la somme des contributions marginales des joueurs au jeu soit égale à la valeur de la grande coalition. Hart et Mas-Colell (1989) proposent de rémunérer les joueurs à hauteur de leur contribution marginale au jeu, sous contrainte que la somme des contributions marginales soit balancée. Si les joueurs sont rémunérés de cette manière, alors l'allocation obtenue correspond à la valeur de Shapley. Enfin, nous verrons que les caractérisations de Myerson (1980) et de Hart et Mas-Colell (1989) sont formellement équivalentes. Ce résultat est aussi obtenu par Ortmann (1998).

3.1 Axiomatique de Myerson (1980)

L'axiome de contributions marginales balancées indique que ce que gagne ou perd i suite à l'entrée de j dans le jeu est équivalent à ce que gagne ou perd j suite à l'entrée de i. Autrement dit, la contribution de i à l'allocation de j suite à son entrée est équivalente à la contribution de j à l'allocation de i suite à son entrée. Cet axiome peut aussi recevoir l'interprétation suivante : supposons que le joueur i menace le joueur j de sortir du jeu. L'impact sur l'allocation du joueur j de l'exécution de cette menace est mesurée par $Y_j(N, v) - Y_j(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}})$. L'axiome de contributions marginales balancées suggère que la menace que fait peser le joueur i sur l'allocation du joueur j est égale à la menace que fait peser le joueur j sur l'allocation du joueur i. Cet axiome est exigeant car il balance les contributions marginales, ou les menaces, pour chaque paire de joueurs.

Contributions marginales balancées : une règle d'allocation $Y : C \to \mathbb{R}^N$ vérifie l'axiome de contributions marginales balancées si pour tout $(N, v) \in C$ et toute paire $i, j \in N$,

$$Y_i(N, v) - Y_i(N \setminus \{j\}, v_{|N\setminus\{j\}}) = Y_j(N, v) - Y_j(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}}). \qquad (11)$$

Myerson (1980) fournit la caractérisation suivante.

Théorème 9 (Myerson (1980))
Une règle d'allocation $Y : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^N$ satisfait l'axiome de balance et l'axiome de contributions marginales balancées si et seulement si $Y = Sh$.

3.2 Axiomatique de Hart et Mas-Colell (1989)

La caractérisation de Hart et Mas-Colell (1989) nécessite un unique axiome incorporant efficacité, marginalisme et cohérence. Cet axiome indique que les joueurs doivent être rémunérés à hauteur de leur contribution marginale au jeu. Le fait d'assurer l'équité dans les rémunérations des joueurs uniquement à l'aide d'un critère marginaliste est clairement énoncé comme une propriété désirable *a priori*. Afin de calculer les contributions marginales au jeu de chaque joueur, Hart et Mas-Colell (1989) introduisent un nouvel objet mathématique, le potentiel, qui associe un réel à chaque jeu. La contribution marginale d'un joueur à un jeu est égale à la différence entre le potentiel du jeu et le potentiel du sous-jeu privé du joueur. Hart et Mas-Colell (1989) proposent de rémunérer les joueurs à hauteur de leur contribution marginale au jeu, sous contrainte que la somme des allocations accordées aux joueurs soit balancée. L'allocation obtenue coïncide avec la valeur de Shapley. Comme nous le verrons plus loin, le potentiel, en plus de caractériser la valeur de Shapley, permet d'obtenir directement la formule récursive de la valeur de Shapley de Maschler et Owen (1989). Celle-ci calcule la valeur de Shapley d'un jeu de taille N à partir de tous ses sous-jeux de taille $N-1$. Le potentiel permet donc de lier les valeurs de Shapley d'un jeu et de tous ses sous-jeux.

Soit $\mathcal{P} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonction qui associe à chaque jeu de coalitions $(N, v) \in \mathcal{C}$ le réel $\mathcal{P}(N, v)$. La contribution marginale d'un joueur $i \in N$ à $(N, v) \in \mathcal{C}$ est donnée par :

$$D_i\mathcal{P}(N, v) = \mathcal{P}(N, v) - \mathcal{P}(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}}). \tag{12}$$

La fonction $\mathcal{P}$ est un potentiel si $\mathcal{P}(\emptyset, v) = 0$ et si pour tout $(N, v) \in \mathcal{C}$,

$$\sum_{i\in N} D_i\mathcal{P}(N, v) = v(N). \tag{13}$$

Ainsi une règle d'allocation rémunérant les joueurs en fonction de leur contribution marginale au jeu mesurée à partir du potentiel $\mathcal{P}$ est nécessairement balancée. Le potentiel pour les jeux de coalitions résume les contributions des joueurs à un jeu en une unique fonction à valeur dans $\mathbb{R}$. Notons que Calvo et Santos (1997) montrent que la rémunération selon (12), sans que (13) soit nécessairement vérifié, détermine une valeur de Shapley d'un jeu auxiliaire.

Le théorème suivant indique qu'un tel potentiel existe, qu'il est unique, et que pour chaque jeu $(N, v) \in \mathcal{C}$, le vecteur des contributions marginales $(D_i\mathcal{P}(N, v))_{i\in N}$ coïncide avec la valeur de Shapley du jeu de coalitions.

Théorème 10 (Hart et Mas-Colell (1989))
Il existe une unique fonction $\mathcal{P}$ déterminée par (13). De plus, $D_i\mathcal{P}(N, v) = Sh_i(N, v)$ pour tout $i \in N$.

Ce théorème signifie que le concept de potentiel pour des jeux de coalitions proposé par Hart et Mas-Colell (1989) permet de caractériser la valeur de Shapley à l'aide d'une unique propriété combinant les principes d'efficacité et d'équité, donnés par (12) et (13). Ici, l'équité dans la rémunération des joueurs repose uniquement sur le critère marginaliste de contribution marginale au jeu.

Remarquons que l'expression du potentiel donnée par (13) nous permet de déterminer la formule de calcul récursive de Maschler et Owen (1989) pour la valeur de Shapley. Celle-ci exprime la valeur de Shapley pour un jeu de la classe $\mathcal{C}_N$ en fonction de l'ensemble de ses sous-jeux $(N,\, v_{|N\setminus\{j\}})$ pour tout $j \in N$, $j \neq i$. Par (13), nous obtenons :

$$|N|\mathcal{P}(N,\, v) = v(N) + \sum_{i\in N} \mathcal{P}(N \setminus \{i\},\, v_{|N\setminus\{i\}})$$

et

$$(|N|-1)\mathcal{P}(N \setminus \{i\},\, v_{|N\setminus\{i\}}) = v(N \setminus \{i\}) + \sum_{j\in N\setminus\{i\}} \mathcal{P}(N \setminus \{i,\, j\},\, v_{|N\setminus\{i,j\}}).$$

En soustrayant la seconde égalité à la première, nous obtenons que la différence

$$|N| \left[\mathcal{P}(N,\, v) - \mathcal{P}(N \setminus \{i\},\, v_{|N\setminus\{i\}})\right]$$

est égale à

$$v(N) - v(N \setminus \{i\}) + \sum_{j\in N\setminus\{i\}} \left[\mathcal{P}(N \setminus \{j\},\, v_{|N\setminus\{j\}}) - \mathcal{P}(N \setminus \{i,\, j\},\, v_{|N\setminus\{i,j\}})\right]$$

ce qui nous donne par le théorème 10 :

$$Sh_i(N,\, v) = 1/|N| \left[v(N) - v(N \setminus \{i\}) + \sum_{j\in N\setminus\{i\}} Sh_i(N \setminus \{j\},\, v_{|N\setminus\{j\}})\right].$$

Nous pouvons établir le lien suivant entre l'axiome de contributions marginales balancées et la caractérisation de Hart et Mas-Colell (1989). Ce résultat est également obtenu par Ortmann (1998).

Proposition 9
Une règle d'allocation vérifie l'axiome définie sur de contributions marginales balancées sur $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe une fonction $\mathcal{P} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{P}(\emptyset,\, v) = 0$ et $D_i\mathcal{P}(N,\, v) = Y_i(N,\, v)$ pour tout $i \in N$.

Preuve :
$(\Longrightarrow)$ Supposons qu'il existe une fonction $\mathcal{P} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{P}(\emptyset,\, v) = 0$

et $D_i\mathcal{P}(N, v) = Y_i(N, v)$ pour tout $i \in N$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
Y_i(N, v) - Y_i(N \setminus \{j\}, v_{|N\setminus\{j\}}) &= \mathcal{P}(N, v) - \mathcal{P}(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}}) \\
&\quad - \mathcal{P}(N \setminus \{j\}, v_{|N\setminus\{j\}}) + \mathcal{P}(N \setminus \{i, j\}, v_{|N\setminus\{i,j\}}) \\
&= Y_j(N, v) - Y_j(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}}).
\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Réciproquement, supposons qu'une règle d'allocation vérifie l'axiome de contributions marginales balancées. Vérifions que nous pouvons définir une fonction $\mathcal{P}$ pour laquelle $\mathcal{P}(N, v) = Y_i(N, v) + \mathcal{P}(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}})$ pour tout $i \in N$ est bien définie. Nous procédons par induction sur $|S|$.
Initialisation : si $|S| = 1$, puisque $\mathcal{P}(\emptyset, v_{|\emptyset}) = 0$, nous pouvons directement définir $Y_i(\{i\}, v_{|\{i\}}) + \mathcal{P}(\emptyset, v_{|\emptyset}) = \mathcal{P}(\{i\}, v_{|\{i\}})$ pour tout $i \in N$.
Hypothèse d'induction : supposons que l'on puisse définir la fonction $\mathcal{P}$ pour $|S| = k-1$. Étape d'induction : vérifions que l'on peut la définir pour $|S| = k$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(S, v_{|S}) = Y_i(S, v_{|S}) + \mathcal{P}(S \setminus \{i\}, v_{S\setminus\{i\}})$. Choisissons $i, j \in S$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
Y_i(S, v_{|S}) + \mathcal{P}(S \setminus \{i\}, v_{|S\setminus\{i\}}) &= Y_i(S \setminus \{j\}, v_{|S\setminus\{j\}}) + Y_j(S, v) \\
&\quad - Y_j(S \setminus \{i\}, v_{|S\setminus\{i\}}) + \mathcal{P}(S \setminus \{i\}, v_{|S\setminus\{i\}}) \\
&= \mathcal{P}(S \setminus \{j\}, v_{|S\setminus\{j\}}) - \mathcal{P}(S \setminus \{i, j\}, v_{|S\setminus\{i,j\}}) \\
&\quad + Y_j(S, v) - \mathcal{P}(S \setminus \{i\}, v_{|S\setminus\{i\}}) \\
&\quad + \mathcal{P}(S \setminus \{i, j\}, v_{|S\setminus\{i,j\}}) + \mathcal{P}(S \setminus \{i\}, v_{|S\setminus\{i\}}) \\
&= Y_j(S, v) + \mathcal{P}(S \setminus \{j\}, v_{|S\setminus\{j\}})
\end{aligned}$$

où la première égalité vient de l'axiome de contributions marginales balancées et la deuxième égalité vient de l'hypothèse d'induction. Ceci étant vrai pour toute paire $i, j \in S$, nous pouvons définir $\mathcal{P}(S, v_{|S}) = Y_i(S, v_{|S}) + \mathcal{P}(S \setminus \{i\}, v_{S\setminus\{i\}})$ pour tout $i \in S$. ■

Cette proposition indique que si une règle d'allocation vérifie l'axiome de contributions marginales balancées, alors elle rémunère les joueurs à hauteur de leur contribution marginale au jeu et réciproquement.

Les caractérisations de Hart et Mas-Colell (1989) et Myerson (1980) sont donc équivalentes.

Pour terminer, on montre comment passer de la caractérisation de Shubik (1962) à celles de Myerson (1980) et de Hart et Mas-Colell (1989). Plus précisément, nous montrons comment obtenir l'axiome de contributions marginales balancées, défini pour toute la classe $\mathcal{C}$, à partir des axiomes d'additivité, de joueur nul et de traitement égalitaire des égaux, définis uniquement pour des jeux de la même classe $\mathcal{C}_N$, et d'une quatrième propriété énoncée par Derks et Haller (1999) : l'insensibilité au retrait d'un joueur nul.

Insensibilité au retrait d'un joueur nul : une règle d'allocation $Y : C \to \mathbb{R}^N$ vérifie l'axiome d'insensibilité au retrait d'un joueur nul si pour tout jeu $(N, v) \in C$ et pour tout joueur nul $j \in N$, $(N \setminus \{j\}, v_{N\setminus\{j\}}) \in C$ et

$$Y_i(N, v) = Y_i(N \setminus \{j\}, v_{N\setminus\{j\}})$$

pour tout $i, j \in N$, $i \neq j$.

Proposition 10
Les axiomes d'additivité, de joueur nul, de traitement égalitaire des égaux et d'insensibilité au retrait d'un joueur nul impliquent l'axiome de contributions marginales balancées sur $\mathcal{C}$.

Preuve : Supposons qu'une règle d'allocation Y vérifie ces quatre propriétés. Considérons le jeu $(N, v) \in \mathcal{C}$ et ses sous-jeux $(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}})$. Notons α_S les coefficients du jeu (N, v) et $\alpha_S^{N\setminus\{i\}}$ les coefficients du jeu $(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}})$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
Y_i(N, v) - Y_i(N \setminus \{j\}, v_{|N\setminus\{j\}}) &= \sum_{S\in\mathcal{N}} Y_i(N, \alpha_S u_S) - \sum_{S\in\mathcal{N}} Y_i(N \setminus \{j\}, \alpha_S^{N\setminus\{j\}} u_S) \\
&= \sum_{S\in\mathcal{N}:i\in S} Y_i(N, \alpha_S u_S) - \sum_{S\in\mathcal{N}:i\in S} Y_i(N \setminus \{j\}, \alpha_S^{N\setminus\{j\}} u_S) \\
&= \sum_{S\in\mathcal{N}:i,j\in S} Y_i(N, \alpha_S u_S) \\
&= \sum_{S\in\mathcal{N}:i,j\in S} Y_j(N, \alpha_S u_S) \\
&= Y_j(N, v) - Y_j(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}}).
\end{aligned}$$

La première égalité vient de la décomposition d'un jeu en somme de jeux à l'unanimité et de l'axiome d'additivité. La deuxième égalité vient du fait que i est un joueur nul dans les jeux à l'unanimité $(N, \alpha_S u_S)$ et $(N, \alpha_S^{N\setminus\{j\}} u_S)$ pour lesquels $i \notin S$, et que Y est invariante au retrait d'un joueur nul. La troisième égalité vient du fait que $\alpha_S = \alpha_S^{N\setminus\{j\}}$ pour tout $S \ni i$. La quatrième égalité vient du fait que i et j sont égaux dans les jeux à l'unanimité $(N, \alpha_S u_S)$ pour lesquels $i, j \in S$. Enfin, la dernière égalité vient des mêmes arguments que les cinq premières. ■

L'exemple 7 montre que la réciproque est fausse.

Exemple 7
La règle d'allocation $Y : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^N$ définie par $Y_i(N, v) = |N|$ vérifie l'axiome

de contribution marginale balancée mais pas les axiome de joueurs nul, d'additivité et d'insensibilité au retrait d'un joueur nul. La règle d'allocation $Y : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^N$ définie par $Y_i(N, v) = i$ vérifie trivialement l'axiome de contribution marginale balancée mais pas les axiomes de joueur nul, d'additivité et de traitement égalitaire des égaux. $\square$

4 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté neuf caractérisations de la valeur de Shapley. Nous avons particulièrement insisté sur les relations logiques qui existent entre ces différentes axiomatiques. La figure 1 en fournit une synthèse. Nous avons aussi montré comment le critère marginaliste, qui n'est pas présent de manière explicite dans la caractérisation de Shapley (1953), est progressivement introduit dans l'axiomatique.

Thomson (2001) indique qu'il est bienvenu, dans une étude axiomatique, d'analyser l'impact de la substitution de certains axiomes par des variantes naturelles. À ce titre, il semble intéressant d'évoquer le résultat fourni par van den Brink (2007). Un joueur est dit annulant si son entrée dans chaque coalition annule sa valeur. L'axiome de joueur annulant indique qu'un tel joueur doit obtenir une allocation nulle. van den Brink (2007) propose de substituer l'axiome de joueur annulant à l'axiome de joueur nul dans l'axiomatique de Shubik (1962). Cette nouvelle axiomatique contient le critère marginaliste puisque l'on conserve l'axiome de traitement égalitaire des égaux. Pourtant, van den Brink (2007) montre que la combinaison de ces quatre axiomes détermine de manière unique la règle de partage égalitaire, dont la définition repose intégralement sur le critère égalitariste : elle répartit égalitairement la valeur de la grande coalition entre les joueurs.

Remerciements

Je remercie Sylvain Béal, Marc Fleurbaey, Guillaume Haeringer, Agnieszka Rusinowska et Philippe Solal pour leurs commentaires et suggestions.

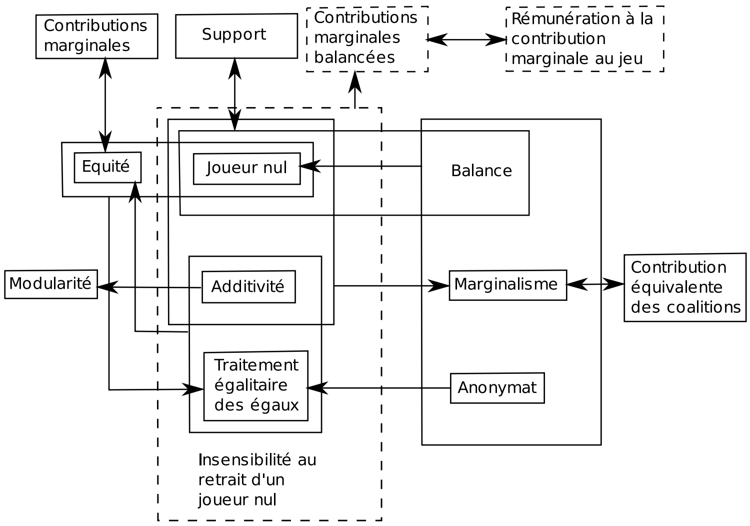

FIGURE 1 – Relations entre les axiomes

Références

Billera, L. J., D. C. Heath, et J. Raanan (1978). Internal telephone billing rates – a novel application of non-atomic game theory. *Operations Research 26*(6), 956–965.

Calvo, E. et J. C. Santos (1997). Potentials in cooperative tu-games. *Mathematical Social Sciences 34*, 175–190.

Casajus, A. (2009). Differential marginality, van den Brink fairness, and the Shapley value. *Theory and Decision*, In press.

Casajus, A. et F. Huettner (2008). Marginality is equivalent to coalitional strategic equivalence. Working Paper.

Chun, Y. (1989). A new axiomatization of the Shapley value. *Games and Economic Behavior 1*, 119–130.

Chun, Y. (1991). On the symmetric and weighted Shapley values. *International Journal of Game Theory 20*, 183–190.

Derks, J. J. M. et H. Haller (1999). Null players out ? Linear values for games with variable supports. *International Game Theory Review 1*, 30–314.

Dubey, P. (1975). On the uniqueness of the Shapley value. *International Journal of Game Theory 4*(3), 131–139.

Feltkamp, V. (1995). Alternative axiomatic characterizations of the Shapley and Banzhaf values. *International Journal of Game Theory 24*, 179–186.

Hamiache, G. (2001). Associated consistency and the Shapley value. *International Journal of Game Theory 30*(2), 279–289.

Hart, O. et A. Mas-Colell (1989). Potential, value, and consistency. *Econometrica 57*, 589–614.

Littlechild, S. C. et G. Owen (1973). A simple expression for the Shapley value in a special case. *Management Science 20*, 370–372.

Littlechild, S. C. et G. F. Thompson (1977). Aircraft landing fees : a game theory approach. *Bell Journal of Economics 8*, 186–204.

Maschler, M. et G. Owen (1989). The consistent Shapley value for hyperplane games. *International Journal of Game Theory 18*, 389–407.

Moretti, S. et F. Patrone (2008). Transversality of the Shapley value. *TOP 16*(1), 1–41.

Moulin, H. (1981). *Théorie des jeux pour l'économie et la politique*. Paris : Hermann.

Myerson, R. B. (1980). Conference structures and fair allocation rules. *International Journal of Game Theory 9*, 169–182.

Neyman, A. (1989). Uniqueness of the Shapley value. *Games and Economic Behavior 1*, 116–118.

Ortmann, M. (1998). Conservation of energy in value theory. *Mathematical methods of operations research 47*(3), 423–449.

Shapley, L. S. (1953). A value for n-person games. In H. Kuhn et A. Tucker (Eds.), *Contribution to the Theory of Games II*, pp. 307–317. Princeton University Press, Princeton.

Shapley, L. S. (1971). Cores of convex games. *International Journal of Game Theory 1*, 11–26.

Shubik, M. (1962). Incentives, decentralized control, the assignment of joint costs and internal pricing. *Management Science 8*(3), 325–343.

Thomson, W. (2001). On the axiomatic method and its recent applications to game theory and resource allocation. *Social Choice and Welfare 18*(2), 327–386.

van den Brink, R. (2001). An axiomatization of the Shapley value using a fairness property. *International Journal of Game Theory 30*, 309–319.

van den Brink, R. (2007). Null or nullifying players : The difference between the Shapley value and the equal division solutions. *Journal of Economic Theory 136*, 767–775.

Winter, E. (2002). The Shapley value. In R. J. Hauman et S. Hart (Eds.), *Hanbook of game theory, with economic applications*, Volume 3, Chapter 53, pp. 2025–2054.

Young, H. P. (1985). Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory 14*(2), 65–72.